

！ DRAFT ！ 2013/11/11

OpenFOAM(R)ソースコード入門pt1 熱伝導方程式の解法から有限体積 法の実装について考える

前編：有限体積法の基礎確認

2013/11/17 オープンCAE勉強会@富山

富山県立大学 中川慎二

#ミニ講習会: OpenFOAM(R)ソースコード入門pt1 熱伝導方程式の解法(laplacianFoam)から有限体積法の実装について考える#

* OpenFOAM のソースコードでは, 基礎式を偏微分方程式の形で記述する. OpenFOAM内部では, 有限体積法を使ってこの微分方程式を解いている. どのようにして, 有限体積法に基づく離散化が実現されているのか, 最もシンプルな拡散方程式(熱伝導方程式)の場合を例として, 実装方法を考えていく.

* 2013年6月のオープンCAE勉強会@富山で, ソースコードの眺め方について講習を実施した. この時は, 使われている技術を断片的に見るに留まった. 今回は, 1つのソルバについて, じっくりとソースコードを眺めたい. まず, 簡単な形状の問題を手作業で解き, その際に出てきた変数などを再認識した上で, ソースコードと照らし合わせる.

* 1次元熱伝導方程式を有限体積法によって離散化し, 手作業で解く. この過程で必要な式変形などを確認する.

* 熱伝導方程式を解くソルバ "laplacianFoam" のソースコードを見ながら, 上記手作業で出てきた式が, どのように使われている(コーディングされている)かを読み解く.

* 与えた偏微分方程式から行列が作られる過程を確認する. しかし, 行列の解法には踏み込まない.

* 第11回 オープンCAE勉強会@富山 での講習資料(OpenFOAMソースコード解読へ向けて pt1_v1.pdf)をご一読ください.

基礎式：非定常、生成なし

非定常熱伝導方程式(拡散方程式)

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \text{div}(\Gamma \text{grad}T) + S_T \\ &= \nabla \cdot (\Gamma \nabla T) + S_T\end{aligned}$$

$\Gamma = \kappa / \rho c_p$ [m²/s] 温度拡散率
熱伝導率 κ [W/(m K)],
比熱 c_p [J/(kg K)], 密度 ρ [kg/m³]
 S_T 生成項

内部発熱なし

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\Gamma \text{ grad}T) = 0$$

検査体積(Control Volume)に渡って積分

$$\int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV - \int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{ grad}T) dV = 0$$

$$\int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV - \int_S (\Gamma \text{ grad}T) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

非定常項

Euler implicit

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V T dV \\ &= \frac{(T_P V_P)^{new} - (T_P V_P)^{old}}{\Delta t} \\ &= \frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} T_P - \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}\end{aligned}$$

T_P の係数に追加

生成項に追加
(現時刻での温度とは
無関係)

拡散項

1次元とし, 点P について考える.

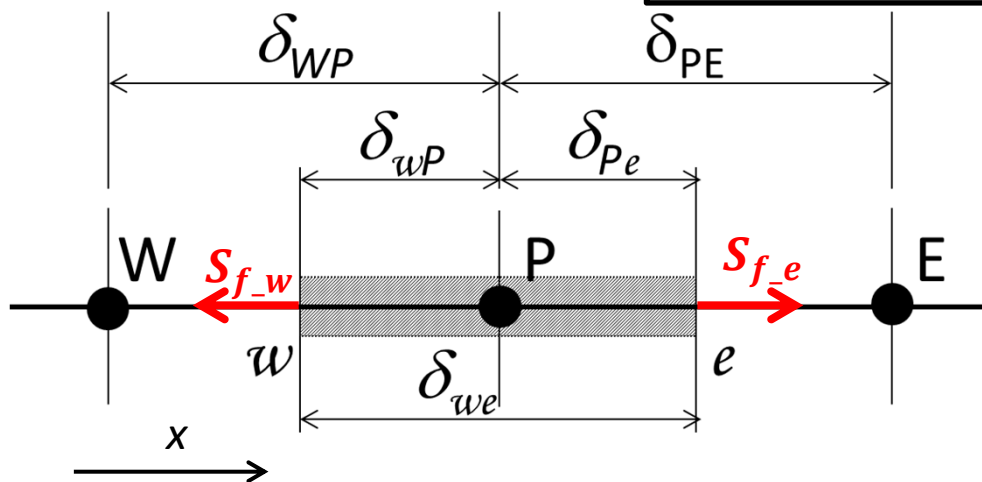
ベクトルの内積

$$\int_S (\Gamma \text{grad}T) \cdot n dS = \sum_f [(\Gamma \text{grad}T)_f \cdot \mathbf{S}_f] = (\Gamma \text{grad}T)_e \cdot \mathbf{S}_{f_e} + (\Gamma \text{grad}T)_w \cdot \mathbf{S}_{f_w}$$

$$= \left(\Gamma \frac{dT}{dx} \right)_e S_{f_e} - \left(\Gamma \frac{dT}{dx} \right)_w S_{f_w} = \Gamma_e \left(\frac{dT}{dx} \right)_e S_{f_e} - \Gamma_w \left(\frac{dT}{dx} \right)_w S_{f_w}$$

S_{f_w} が逆向きなので, 負

スカラー値の積



\mathbf{n} control volume界面での単位面積ベクトル
大きさ:1, 方向:面に垂直

\sum_f control volumeの全ての界面での和

$$\mathbf{S}_f = S_f \mathbf{n}$$

control volume界面での面積ベクトル
大きさ:面積 S_f , 方向:面に垂直

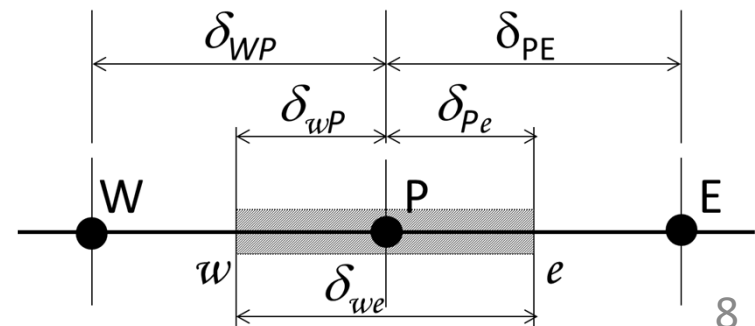
勾配について

検査体積面 w における勾配 $\left(\frac{dT}{dx}\right)_w$ を, 最も単純に, 点Pと点Wでの値を線形近似して求める

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{\delta_{WP}}$$

同様に

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{\delta_{PE}}$$



項の整理

これまでのまとめ

$$\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} T_P - \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t} - \Gamma_e S_e \frac{T_E - T_P}{\delta_{PE}} + \Gamma_w S_w \frac{T_P - T_W}{\delta_{WP}} = 0$$

T_P, T_W, T_E , についてまとめる.

$$\left(\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} + \frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}} + \frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}} \right) T_P = \left(\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}} \right) T_E + \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}} \right) T_W + \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}$$

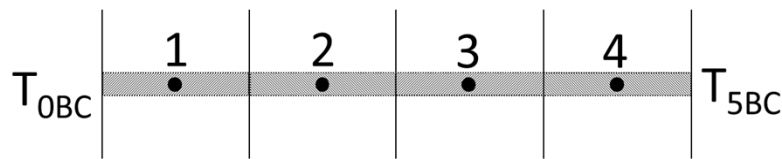
$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u$$

a_P	a_E	a_W	S_u
$a_E + a_W + \frac{(V_P)^{new}}{\Delta t}$	$\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	$\frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}$	$\frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}$

式の整理 → 行列式

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u$$

例. 1次元, 4CV



$$\left\{ \begin{array}{l} a_{P1} T_1 = a_{E1} T_2 + S_{BC0} + S_{u1} \\ a_{P2} T_2 = a_{E2} T_3 + a_{W2} T_1 + S_{u2} \\ a_{P3} T_3 = a_{E3} T_4 + a_{W3} T_2 + S_{u3} \\ a_{P4} T_4 = a_{W4} T_3 + S_{BC5} + S_{u4} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} a_{p1} & -a_{E1} & 0 & 0 \\ -a_{W2} & a_{P2} & -a_{E2} & 0 \\ 0 & -a_{W3} & a_{P3} & -a_{E3} \\ 0 & 0 & -a_{W4} & a_{P4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{BC0} + S_{u1} \\ S_{u2} \\ S_{u3} \\ S_{BC5} + S_{u4} \end{bmatrix}$$

$$[A][T]=[b]$$

手作業：非定常、生成なし

例題：1次元非定常熱伝導

銅丸棒 (断面積 $S = 10^{-4} \text{ m}^2$, 長さ 0.4 m)

温度拡散率 $\Gamma = \kappa / \rho c_p = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

熱伝導率 $\kappa = 360 \text{ W}/(\text{m K})$,

比熱 $c_p = 400 \text{ J}/(\text{kg K})$, 密度 $\rho = 9000 \text{ kg}/\text{m}^3$

内部発熱等なし $S_T = 0$

軸(x)方向の1次元熱伝導, 両端温度固定

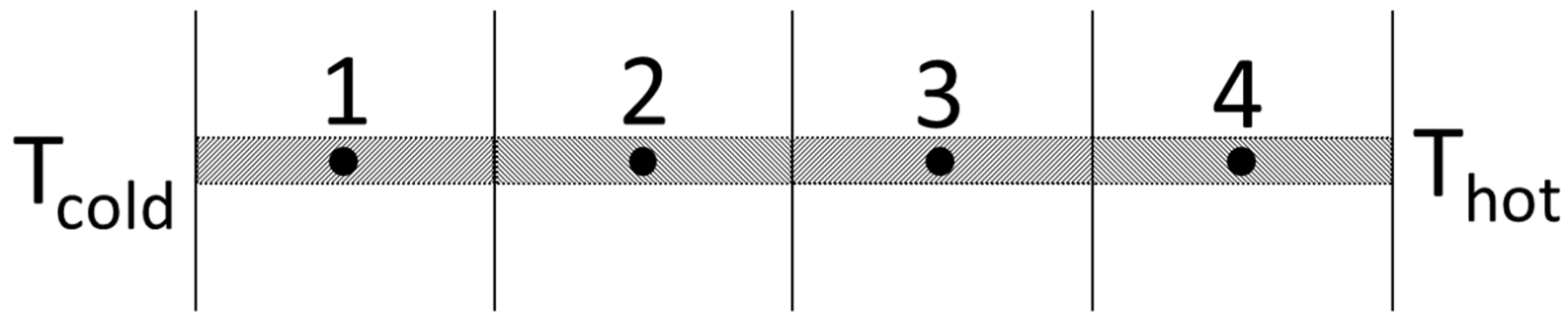
初期温度 = 低温側温度

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\Gamma \text{ grad} T) = 0$$

$T_{\text{cold}} = 100\text{K}$

$T_{\text{hot}} = 300\text{K}$

棒全体を, 4つの Control Volume に等分割する.
Control Volume(CV) の中心に, 代表点を考える.



CVの長さは全長の4分の1 = 0.1 m.

代表点間の距離も, 全長の4分の1 = 0.1 m.

作業手順

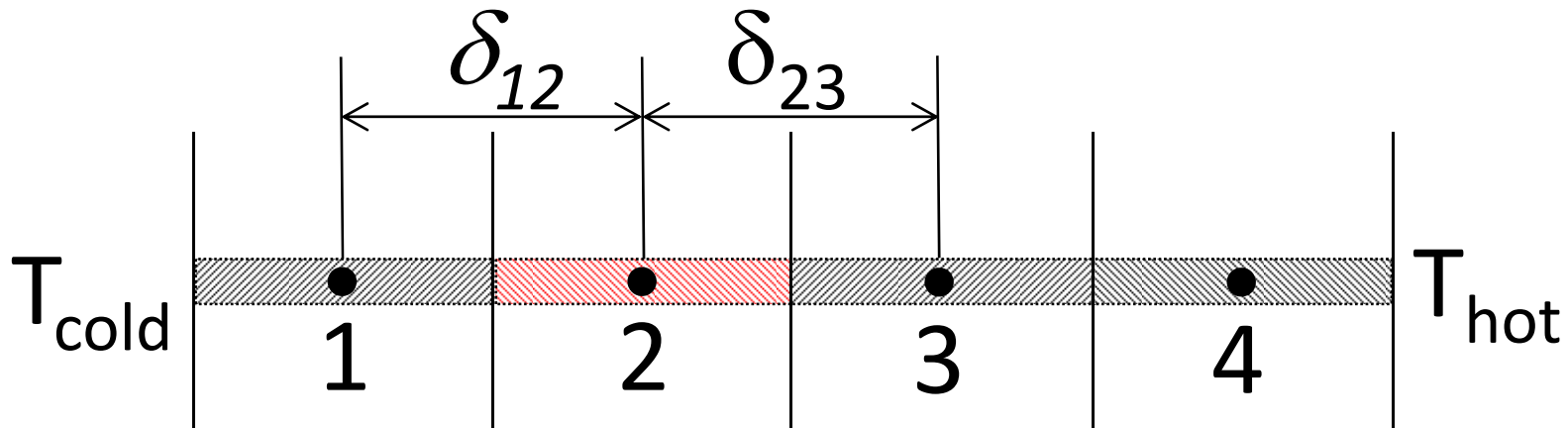
- 基礎式を離散化した式の係数を, 各control volume に対して求める
 - 境界(端)では, 特別な処置が必要
- この係数を並べて, control volume 代表点での温度に関する連立方程式を得る
- この連立方程式を, 行列式で表現する
- 行列式を解いて, 温度分布を求める

内部 control volume CV2

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u$$

a_P	a_E	a_W	S_u
$a_E + a_W$ $(V_P)^{new}$ $+ \frac{\quad}{\Delta t}$	$\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}} = \frac{\Gamma_{23} S_{23}}{\delta_{23}} = \frac{\Gamma S}{\delta_{23}}$ $= \frac{10^{-4} 10^{-4}}{0.1} = 10^{-7}$	$\frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}} = \frac{\Gamma_{12} S_{12}}{\delta_{12}} = \frac{\Gamma S}{\delta_{12}}$ $= \frac{10^{-4} 10^{-4}}{0.1} = 10^{-7}$	$\frac{(T_2 V_2)^{old}}{\Delta t}$ $= \frac{(T_2)^{old} 10^{-4} 10^{-4}}{\quad}$ $= (T_2)^{old} 10^{-8}$

今回は，断面積 S ，温度拡散率 Γ も一定である。
CV3 についても同様。



境界 control volume CV1

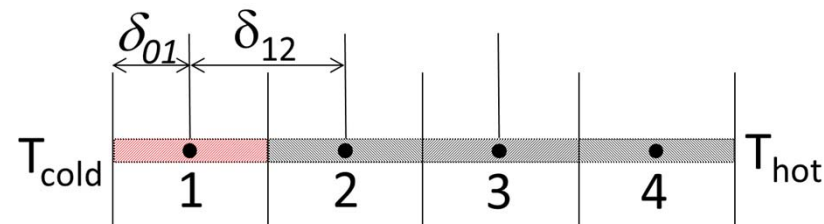
境界面(温度 T_{cold})における勾配 $\left(\frac{dT}{dx}\right)_W$ を, 最も単純に, T_P と T_{cold} の値を線形近似して求める $\left(\frac{dT}{dx}\right)_W = \frac{T_P - T_{\text{cold}}}{\delta_{01}}$

$$\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} T_P - \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t} - \Gamma S \frac{T_E - T_P}{\delta_{PE}} + \Gamma S \frac{T_P - T_{\text{cold}}}{\delta_{01}} = 0$$

$$\left(\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} + \frac{\Gamma S}{\delta_{PE}} + \mathbf{0} + \frac{\Gamma S}{\delta_{01}}\right) T_P = \left(\frac{\Gamma S}{\delta_{PE}}\right) T_E + (\mathbf{0}) T_W + \frac{\Gamma S}{\delta_{01}} T_{\text{cold}} + \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u + S_{u_{BC}}$$

a_P	a_E	a_W	S_u	$S_{u_{BC}}$	S_P	$S_{P_{BC}}$
$a_E + a_W - S_P - S_{P_{BC}}$	$\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	$\mathbf{0}$	$\frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}$	$\frac{\Gamma S}{\delta_{01}} T_{\text{cold}}$	$-\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t}$	$-\frac{\Gamma S}{\delta_{01}}$

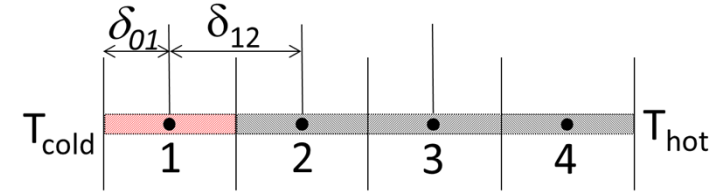


境界 control volume CV1

境界面(温度 T_{cold})における勾配 $\left(\frac{dT}{dx}\right)_w$ を, 最も単純に, T_P と T_{cold} の値

を線形近似して求める

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_{\text{cold}}}{\delta_{01}}$$



$$\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} T_P - \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t} - \Gamma S \frac{T_E - T_P}{\delta_{PE}} + \Gamma S \frac{T_P - T_{\text{cold}}}{\delta_{01}} = 0$$

$$\left(\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} + \frac{\Gamma S}{\delta_{PE}} + 0 + \frac{\Gamma S}{\delta_{01}}\right) T_P = \left(\frac{\Gamma S}{\delta_{PE}}\right) T_E + (0) T_W + \frac{\Gamma S}{\delta_{01}} T_{\text{cold}} + \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u + S_{u_BC}$$

a_P	a_E	a_W	S_u	S_{u_BC}	S_P	S_{P_BC}
a_E	$\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	0	$\frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}$	$\frac{\Gamma S}{\delta_{01}} T_{\text{cold}}$	$-\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t}$	$-\frac{\Gamma S}{\delta_{01}}$
$+ a_W$	$10^{-4} 10^{-4}$		$(T_1)^{old} 10^{-4} 10^{-4}$	$10^{-4} 10^{-4}$	$10^{-4} 10^{-4}$	$10^{-4} 10^{-4}$
$- S_P$	$= \frac{0.1}{10^{-7}}$		$= \frac{1}{(T_1)^{old} 10^{-8}}$	$= \frac{0.05}{10^{-7}} T_{\text{cold}}$	$= -\frac{1}{10^{-8}}$	$= -\frac{0.05}{10^{-7}}$
$- S_{P_BC}$				$= 2 \times 10^{-7} T_{\text{cold}}$		$= -2 \times 10^{-7}$

境界 control volume CV4

境界面(温度 T_{hot})における勾配 $\left(\frac{dT}{dx}\right)_e$ を, 最も単純に, T_P と T_{hot} の値を線形近似して求める $\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_{hot} - T_P}{\delta_{45}}$

$$\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} T_P - \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t} - \Gamma S \frac{T_{hot} - T_P}{\delta_{45}} + \Gamma S \frac{T_P - T_W}{\delta_{WP}} = 0$$

$$\left(\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} + 0 + \frac{\Gamma S}{\delta_{WP}} + \frac{\Gamma S}{\delta_{45}} \right) T_P = (0) T_E + \left(\frac{\Gamma S}{\delta_{WP}} \right) T_W + \frac{\Gamma S}{\delta_{45}} T_{hot} + \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u + S_{u_{BC}}$$

a_P	a_E	a_W	S_u	$S_{u_{BC}}$	S_P	$S_{P_{BC}}$
a_E + a_W - S_P - $S_{P_{BC}}$	0	$\frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{34}}$ $= \frac{10^{-4} 10^{-4}}{0.1}$ $= 10^{-7}$	$\frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}$ $= \frac{(T_4)^{old} 10^{-4} 10^{-4}}{1}$ $= (T_4)^{old} 10^{-8}$	$\frac{\Gamma S}{\delta_{45}} T_{hot}$ $= \frac{10^{-4} 10^{-4}}{0.05} T_{hot}$ $= 2 \times 10^{-7} T_{hot}$	$-\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t}$ $= -\frac{10^{-4} 10^{-4}}{1}$ $= -10^{-8}$	$-\frac{\Gamma S}{\delta_{45}}$ $= -\frac{10^{-4} 10^{-4}}{0.05}$ $= -2 \times 10^{-7}$

これまでのまとめ(記入用)

C V	a_p $= a_E$ $+ a_W$ $- S_P$	$a_E = \frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	a_W $= \frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}$	S_u	$S_{u_{BC}}$	S_P	$S_{P_{BC}}$
1							
2							
3							
4							

$$a_p T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u + S_{u_{BC}}$$

式

.....

.....

.....

これまでのまとめ

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u + S_{u_{BC}}$$

C V	a_P $= a_E$ $+ a_W$ $- S_P$	$a_E = \frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	$a_W = \frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}$	S_u	$S_{u_{BC}}$	S_P	$S_{P_{BC}}$
1	3.1×10^{-7}	10^{-7}	0	$(T_1)^{old} 10^{-8}$	$2 \times 10^{-7} T_{cold}$ $= 2 \times 10^{-5}$	-10^{-8}	$-2 \times 10^{-}$
2	2.1×10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	$(T_2)^{old} 10^{-8}$	0	-10^{-8}	0
3	2.1×10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	$(T_3)^{old} 10^{-8}$	0	-10^{-8}	0
4	3.1×10^{-7}	0	10^{-7}	$(T_4)^{old} 10^{-8}$	$2 \times 10^{-7} T_{hot}$ $= 6 \times 10^{-5}$	-10^{-8}	$-2 \times 10^{-}$

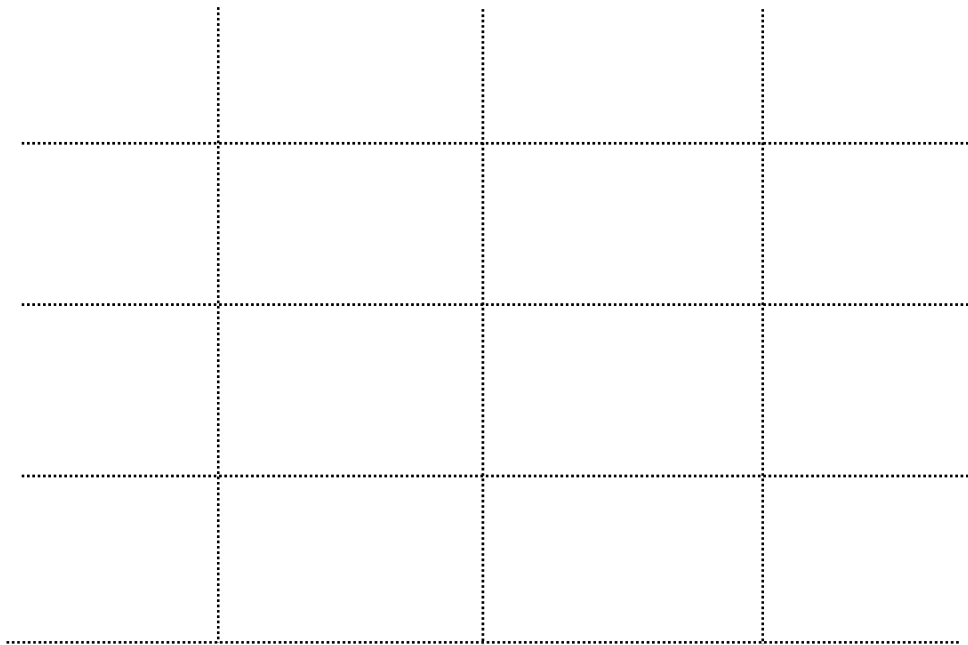
$$3.1 \times 10^{-7} T_1 = 10^{-7} T_2 + 2 \times 10^{-7} T_{cold} + (T_1)^{old} 10^{-8}$$

$$2.1 \times 10^{-7} T_2 = 10^{-7} T_1 + 10^{-7} T_3 + (T_2)^{old} 10^{-8}$$

$$2.1 \times 10^{-7} T_3 = 10^{-7} T_2 + 10^{-7} T_4 + (T_3)^{old} 10^{-8}$$

$$3.1 \times 10^{-7} T_4 = 10^{-7} T_3 + 2 \times 10^{-7} T_{hot} + (T_4)^{old} 10^{-8}$$

行列式(記入用)



$$\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$$

式の整理 → 行列式

$$3.1 T_1 = T_2 + 2 T_{cold} + 0.1(T_1)^{old}$$

$$2.1 T_2 = T_1 + T_3 + 0.1(T_2)^{old}$$

$$2.1 T_3 = T_2 + T_4 + 0.1(T_3)^{old}$$

$$3.1 T_4 = T_3 + 2T_{hot} + 0.1(T_4)^{old}$$

$$[A][x]=[b]$$

$$\begin{bmatrix} 3.1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 + 10 \\ 10 \\ 10 \\ 600 + 10 \end{bmatrix}$$

行列式を解く

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 119 \\ 160 \\ 206 \\ 263 \end{bmatrix}$$

定常解

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 175 \\ 225 \\ 275 \end{bmatrix}$$

Maxima で解く場合

<http://maxima.sourceforge.net/>

```
/* equations */
eq1: [3.1*t1-t2=210, -t1+2.1*t2-t3=10, -t2+2.1*t3-t4=10, -t3+3.1*t4=610];

/* temperature */
T: [t1,t2,t3,t4];

/* 係数行列の表示 */
Ab: augcoefmatrix(eq1, T);

/* 対角成分を1にしてみる */
echelon(Ab);

/* solve */
solve(eq1, T);

/* 解いた結果を小数点で表示する */
float( solve(eq1, T)),numer;
```

まとめ

行列

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u + S_{u_{BC}}$$

$$[A][T]=[b]$$

$$\begin{bmatrix} a_{p1} & -a_{E1} & 0 & 0 \\ -a_{W2} & a_{P2} & -a_{E2} & 0 \\ 0 & -a_{W3} & a_{P3} & -a_{E3} \\ 0 & 0 & -a_{W4} & a_{P4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{u1} + S_{u1_{BC}} \\ S_{u2} + S_{u2_{BC}} \\ S_{u3} + S_{u3_{BC}} \\ S_{u4} + S_{u4_{BC}} \end{bmatrix}$$

- 偏微分方程式の各項から、これら行列に入る係数が出てくる。
- 項毎に行列を作り、まとめることで、最終的に解きたい行列式を作成する。

旧版

基礎式：定常、生成あり

非定常熱伝導方程式(拡散方程式)

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \text{div}(\Gamma \text{grad}T) + S_T \\ &= \nabla \cdot (\Gamma \nabla T) + S_T\end{aligned}$$

$\Gamma = \kappa / \rho c_p$ [m²/s] 温度拡散率
熱伝導率 κ [W/(m K)],
比熱 c_p [J/(kg K)], 密度 ρ [kg/m³]
 S_T 生成項

定常状態

$$\text{div}(\Gamma \text{ grad}T) + S_T = 0$$

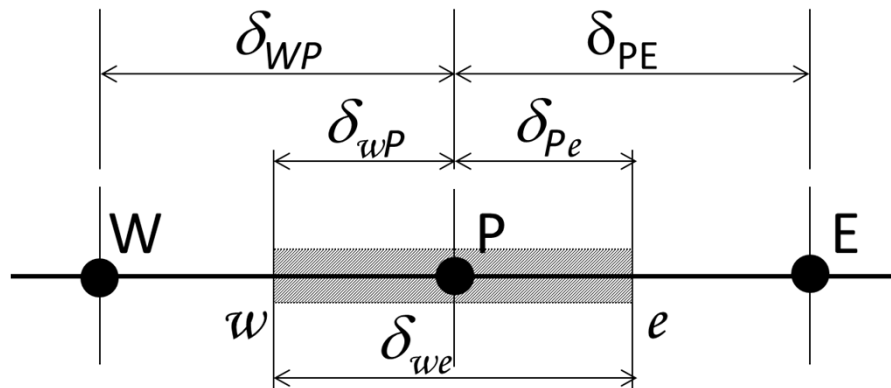
検査体積(Control Volume)に渡って積分

$$\int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{ grad}T) dV + \int_{CV} S_T dV = 0$$

$$\int_S (\Gamma \text{ grad}T) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{CV} S_T dV = 0$$

1次元とし，点P について考える.

$$\begin{aligned}
 \int_S (\Gamma \text{grad}T) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{CV} S_T dV &= (\Gamma S \text{grad}T)_e - (\Gamma S \text{grad}T)_w + S_T \Delta V \\
 &= \left(\Gamma S \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(\Gamma S \frac{dT}{dx} \right)_w + S_T \Delta V \\
 &= \Gamma_e S_e \left(\frac{dT}{dx} \right)_e - \Gamma_w S_w \left(\frac{dT}{dx} \right)_w + S_T \Delta V = 0
 \end{aligned}$$



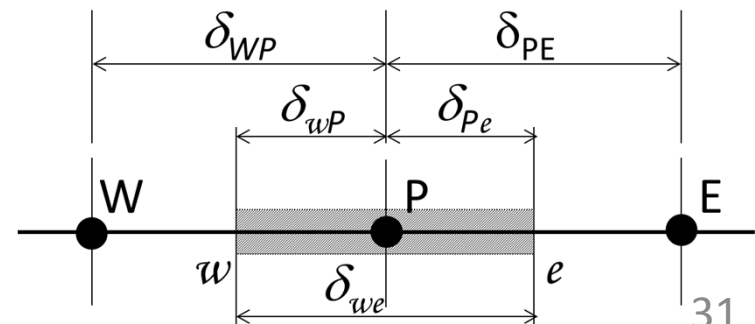
勾配について

検査体積面 w における勾配 $\left(\frac{dT}{dx}\right)_w$ を, 最も単純に, 点Pと点Wでの値を線形近似して求める

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{\delta_{WP}}$$

同様に

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{\delta_{PE}}$$

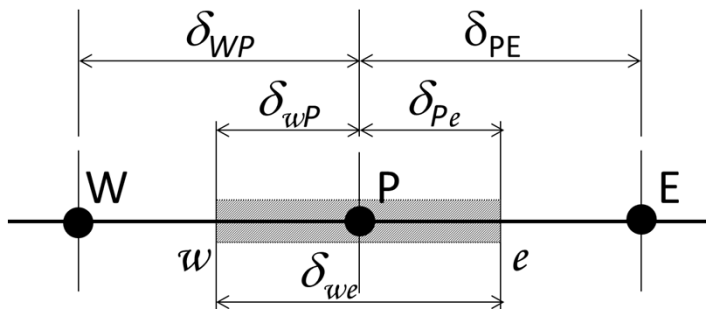


生成項の線形化

生成項が、温度の関数となる場合がある。

線形化 $S_T = S_{T_u} + S_{T_P} T_P$

$$\begin{aligned} & \Gamma_e S_e \left(\frac{dT}{dx} \right)_e - \Gamma_w S_w \left(\frac{dT}{dx} \right)_w + S_T \Delta V \\ &= \Gamma_e S_e \left(\frac{dT}{dx} \right)_e - \Gamma_w S_w \left(\frac{dT}{dx} \right)_w + (S_{T_u} + S_{T_P} T_P) \Delta V = 0 \end{aligned}$$



項の整理

これまでのまとめ

$$\Gamma_e S_e \frac{T_E - T_P}{\delta_{PE}} - \Gamma_w S_w \frac{T_P - T_W}{\delta_{WP}} + (S_{T_u} + S_{T_P} T_P) \Delta V = 0$$

T_P, T_W, T_E , についてまとめる.

$$\left(\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}} + \frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}} - S_{T_P} \Delta V \right) T_P = \left(\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}} \right) T_E + \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}} \right) T_W + S_{T_u} \Delta V$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_{T_u} \Delta V$$

a_P	a_E	a_W
$a_E + a_W$ $- S_{T_P} \Delta V$	$\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	$\frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}$

式の整理 → 行列式

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_{T_u} \Delta V$$

例. 1次元, 4CV

$$a_{P3} T_3 = a_{E3} T_4 + a_{W3} T_2 + S_{T_u3} \Delta V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{P1} T_1 = a_{E1} T_2 + S_{BC0} + S_{T_u1} \Delta V \\ a_{P2} T_2 = a_{E2} T_3 + a_{W2} T_1 + S_{T_u2} \Delta V \\ a_{P3} T_3 = a_{E3} T_4 + a_{W3} T_2 + S_{T_u3} \Delta V \\ a_{P4} T_4 = a_{W4} T_3 + S_{BC5} + S_{T_u4} \Delta V \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} a_{p1} & -a_{E1} & 0 & 0 \\ -a_{W2} & a_{P2} & -a_{E2} & 0 \\ 0 & -a_{W3} & a_{P3} & -a_{E3} \\ 0 & 0 & -a_{W4} & a_{P4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{BC0} + S_{T_u1} \Delta V \\ S_{T_u2} \Delta V \\ S_{T_u3} \Delta V \\ S_{BC5} + S_{T_u4} \Delta V \end{bmatrix}$$

$$[A][T]=[b]$$

手作業：定常、生成なし

例題：1次元定常熱伝導

銅丸棒 (断面積 $S = 10^{-4} \text{ m}^2$, 長さ 0.4 m)

温度拡散率 $\Gamma = \kappa / \rho c_p = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$


熱伝導率 $\kappa = 360 \text{ W}/(\text{m K})$,

比熱 $c_p = 400 \text{ J}/(\text{kg K})$, 密度 $\rho = 9000 \text{ kg}/\text{m}^3$

内部発熱等なし $S_T = 0$

軸(x)方向の1次元熱伝導, 両端温度固定

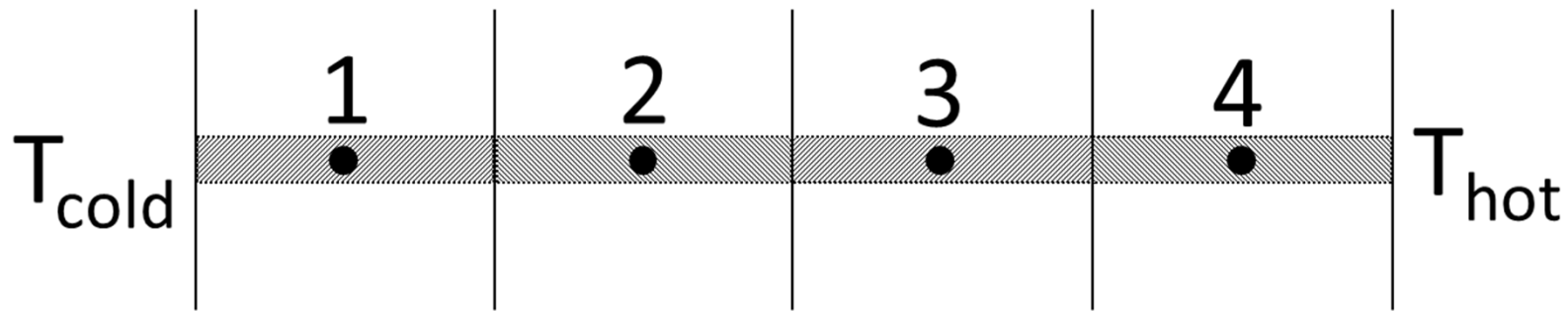
$$\text{div}(\Gamma \text{ grad} T) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{dT}{dx} \right) = 0$$



$T_{\text{cold}} = 100\text{K}$

$T_{\text{hot}} = 300\text{K}$

棒全体を, 4つの Control Volume に等分割する.
Control Volume(CV) の中心に, 代表点を考える.



CVの長さは全長の4分の1 = 0.1 m.

代表点間の距離も, 全長の4分の1 = 0.1 m.

作業手順

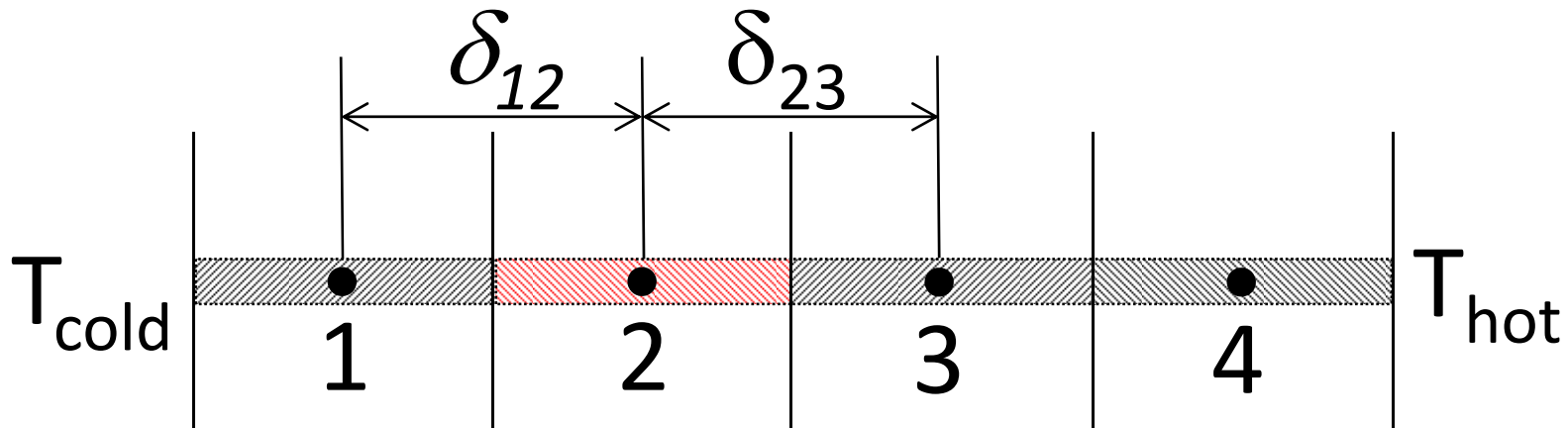
- 基礎式を離散化した式の係数を, 各control volume に対して求める
 - 境界(端)では, 特別な処置が必要
- この係数を並べて, control volume 代表点での温度に関する連立方程式を得る
- この連立方程式を, 行列式で表現する
- 行列式を解いて, 温度分布を求める

内部 control volume CV2

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W$$

a_P	a_E	a_W
$a_E + a_W$	$\frac{\Gamma_{23} S_{23}}{\delta_{23}} = \frac{\Gamma S}{\delta_{23}} = \frac{10^{-4} \cdot 10^{-4}}{0.1} = 10^{-7}$	$\frac{\Gamma_{12} S_{12}}{\delta_{12}} = \frac{\Gamma S}{\delta_{12}} = \frac{10^{-4} \cdot 10^{-4}}{0.1} = 10^{-7}$

今回は，断面積 S ，温度拡散率 Γ も一定である。
CV3 についても同様。



境界 control volume CV1

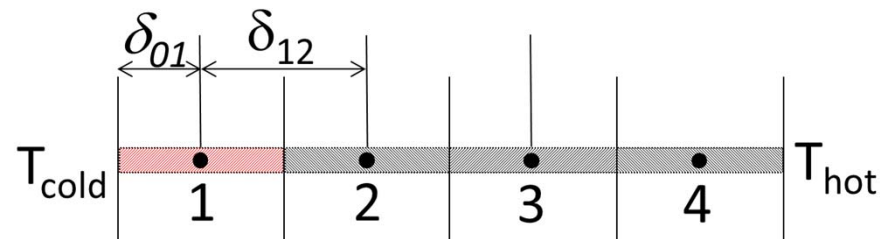
境界面(温度 T_{cold})における勾配 $\left(\frac{dT}{dx}\right)_W$ を, 最も単純に, T_P と T_{cold} の値を線形近似して求める $\left(\frac{dT}{dx}\right)_W = \frac{T_P - T_{\text{cold}}}{\delta_{01}}$

$$\Gamma S \frac{T_E - T_P}{\delta_{PE}} - \Gamma S \frac{T_P - T_{\text{cold}}}{\delta_{01}} = \frac{\Gamma S}{\delta_{PE}} T_E - \frac{\Gamma S}{\delta_{PE}} T_P - \frac{\Gamma S}{\delta_{01}} T_P + \frac{\Gamma S}{\delta_{01}} T_{\text{cold}} = 0$$

$$\left(\frac{\Gamma S}{\delta_{PE}} + 0 + \frac{\Gamma S}{\delta_{01}}\right) T_P = \left(\frac{\Gamma S}{\delta_{PE}}\right) T_E + (0) T_W + \frac{\Gamma S}{\delta_{01}} T_{\text{cold}}$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_U$$

a_P	a_E	a_W	S_U	S_P
$a_E + a_W - S_P$	$\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	0	$\frac{\Gamma S}{\delta_{01}} T_{\text{cold}}$	$-\frac{\Gamma S}{\delta_{01}}$



境界 control volume CV4

境界面(温度 T_{hot})における勾配 $\left(\frac{dT}{dx}\right)_e$ を, 最も単純に, T_p と T_{hot} の値を線形近似して求める $\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_{hot}-T_P}{\delta_{45}}$

$$\Gamma S \frac{T_{hot} - T_P}{\delta_{45}} - \Gamma S \frac{T_P - T_W}{\delta_{WP}} = \frac{\Gamma S}{\delta_{45}} T_{hot} - \frac{\Gamma S}{\delta_{45}} T_P - \frac{\Gamma S}{\delta_{WP}} T_P + \frac{\Gamma S}{\delta_{WP}} T_W = 0$$

$$\left(0 + \frac{\Gamma S}{\delta_{WP}} + \frac{\Gamma S}{\delta_{45}}\right) T_P = (0) T_E + \left(\frac{\Gamma S}{\delta_{WP}}\right) T_W + \frac{\Gamma S}{\delta_{45}} T_{hot}$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_U$$

a_P	a_E	a_W	S_U	S_P
$a_E + a_W - S_P$ $= 0 + 10^{-7}$ $+ 2 \times 10^{-7}$ $= 3 \times 10^{-7}$	0	$\frac{\Gamma S}{\delta_{WP}} = \frac{\Gamma S}{\delta_{34}}$ $\frac{10^{-4}}{10^{-4}}$ $= \frac{0.1}{10^{-7}}$	$\frac{\Gamma S}{\delta_{45}} T_{hot}$ $\frac{10^{-4}}{10^{-4}}$ $= \frac{0.05}{10^{-7}} T_{hot}$ $= 2 \times 10^{-7} T_{hot}$	$-\frac{\Gamma S}{\delta_{45}}$ $= -2 \times 10^{-7}$

これまでのまとめ(記入用)

CV	$a_P = a_E + a_W - S_P$	$a_E = \frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	$a_W = \frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}$	S_U	S_P
1					
2					
3					
4					

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_U$$

式

.....

.....

.....

これまでのまとめ

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_U$$

CV	$a_P = a_E + a_W - S_P$	$a_E = \frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	$a_W = \frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}$	S_U	S_P
1	3×10^{-7}	10^{-7}	0	$2 \times 10^{-7} T_{cold}$ $= 2 \times 10^{-5}$	-2×10^{-7}
2	2×10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	0	0
3	2×10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	0	0
4	3×10^{-7}	0	10^{-7}	$2 \times 10^{-7} T_{hot}$ $= 6 \times 10^{-5}$	-2×10^{-7}

$$3 \times 10^{-7} T_1 = 10^{-7} T_2 + 2 \times 10^{-7} T_{cold}$$

$$2 \times 10^{-7} T_2 = 10^{-7} T_1 + 10^{-7} T_3$$

$$2 \times 10^{-7} T_3 = 10^{-7} T_2 + 10^{-7} T_4$$

$$3 \times 10^{-7} T_4 = 10^{-7} T_3 + 2 \times 10^{-7} T_{hot}$$

行列式(記入用)

$$\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

式の整理 → 行列式

$$3T_1 = T_2 + 2T_{cold}$$

$$2T_2 = T_1 + T_3$$

$$2T_3 = T_2 + T_4$$

$$3T_4 = T_3 + 2T_{hot}$$

$$[A][x]=[b]$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2T_{cold} \\ 0 \\ 0 \\ 2T_{hot} \end{bmatrix}$$

行列式を解く

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 175 \\ 225 \\ 275 \end{bmatrix}$$

Maxima で解く場合

<http://maxima.sourceforge.net/>

```
/* equations */
eq1: [3*t1-t2=200, -t1+2*t2-t3=0, -t2+2*t3-t4=0, -t3+3*t4=600];

/* temperature */
T: [t1,t2,t3,t4];

/* 係数行列の表示 */
Ab: augcoefmatrix(eq1, T);

/* 対角成分を1にしてみる */
echelon(Ab);

/* solve */
solve(eq1, T);
/* 解いた結果を小数点で表示する */
float( solve(eq1, T)),numer;
```