OpenFOAM(R)ソースコード入門pt1 熱伝導方程式の解法から有限体積法の実装について考える

前編:有限体積法の基礎確認

2013/11/17 オープンCAE勉強会@富山

富山県立大学 中川慎二

* OpenFOAM のソースコードでは，基礎式を偏微分方程式の形で記述する．OpenFOAM内部では，有限体積法を使ってこの微分方程式を解いている．どのようにして，有限体積法に基づく離散化が実現されているのか，最もシンプルな拡散方程式（熱伝導方程式）の場合を例として，実装方法を考えていく．

*まず，1次元熱伝導方程式を有限体積法によって離散化し，手作業で解く．この過程で必要な式変形などを確認する．

* 熱伝導方程式を解くソルバ "laplacianFoam" のソースコードを見ながら，上記手作業で出てきた式が，どのように使われている（コーディングされている）かを読み解く．

* 与えた偏微分方程式から行列が作られる過程を確認する．しかし，行列の解法には踏み込まない．

シミュレーションの流れ

- 偏微分方程式

有限体積法

- 離散方程式

係数列の計算

- 行列

行列の解法

- 解

基礎式：非定常、生成なし

非定常熱伝導方程式（拡散方程式）

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\Gamma\,\mathrm{grad}T) + S_T$$
$$= \nabla \cdot (\Gamma \nabla T) + S_T$$

$\Gamma = {}^{\kappa}/_{\rho\, c_p}$ [m²/s]　温度拡散率

熱伝導率 $\kappa[W/(m\ K)]$,

比熱 $c_p\ [J/(kg\ K)]$, 密度 $\rho[kg/m^3]$

S_T　生成項

内部発熱なし

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \mathrm{div}(\Gamma\ \mathrm{grad} T) = 0$$

検査体積(Control Volume)に渡って積分

$$\int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV - \int_{CV} \mathrm{div}(\Gamma\ \mathrm{grad} T) dV = 0$$

$$\int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV - \int_S (\Gamma\ \mathrm{grad} T) \cdot \boldsymbol{n} dS = 0$$

非定常項

Euler implicit

$$
\begin{aligned}
\int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV &= \frac{\partial}{\partial t}\int_V T dV \\
&= \frac{(T_P V_P)^{new} - (T_P V_P)^{old}}{\Delta t} \\
&= \underbrace{\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t}}_{T_P\text{の係数に追加}} T_P - \underbrace{\frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}}_{\text{生成項に追加（現時刻での温度とは無関係）}}
\end{aligned}
$$

拡散項

1次元とし，点P について考える.

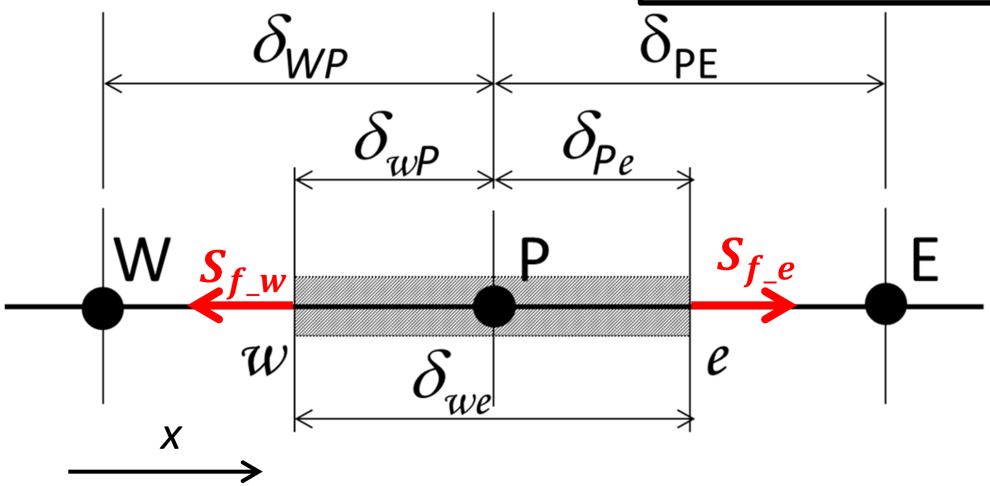
ベクトルの内積

$$\int_S (\Gamma\ \mathrm{grad}T)\cdot \boldsymbol{n} dS = \sum_f \left[(\Gamma\ \mathrm{grad}T)_f \cdot \boldsymbol{S_f}\right] = (\Gamma\ \mathrm{grad}T)_e \cdot \boldsymbol{S_{f\_e}} + (\Gamma\ \mathrm{S}\ \mathrm{grad}T)_w \cdot \boldsymbol{S_{f\_w}}$$

$$= \left(\Gamma\ \frac{dT}{dx}\right)_e S_{f\_e} - \left(\Gamma\ \frac{dT}{dx}\right)_w S_{f\_w} = \Gamma_e \left(\frac{dT}{dx}\right)_e S_{f\_e} - \Gamma_w \left(\frac{dT}{dx}\right)_w S_{f\_w}$$

$\boldsymbol{S_{f\_w}}$ が逆向きなので，負

スカラー値の積



$\boldsymbol{n}$ control volume界面での単位面積ベクトル
大きさ：1，方向：面に垂直

$\sum_f$ control volumeの全ての界面での和

$\boldsymbol{S_f} = S_f \boldsymbol{n}$
control volume界面での面積ベクトル
大きさ：面積S_f，方向：面に垂直

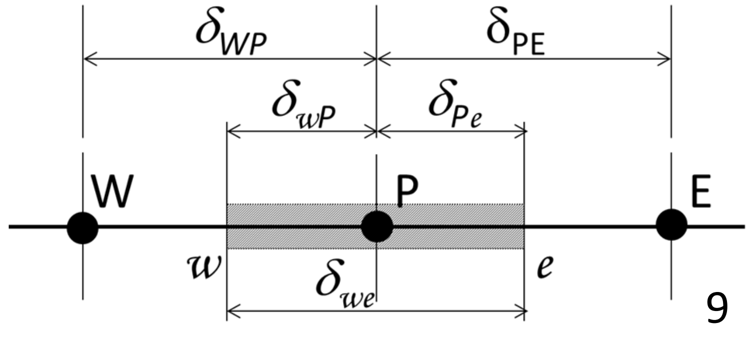
勾配について

検査体積面wにおける勾配$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w$を，最も単純に，点Pと点Wでの値を線形近似して求める

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{\delta_{WP}}$$

同様に

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{\delta_{PE}}$$



項の整理

これまでのまとめ

$$\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t}T_P - \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t} - \Gamma_e S_e \frac{T_E - T_P}{\delta_{PE}} + \Gamma_w S_w \frac{T_P - T_W}{\delta_{WP}} = 0$$

T_P, T_W, T_E, についてまとめる.

$$\left(\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} + \frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}} + \frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}\right)T_P = \left(\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}\right)T_E + \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}\right)T_W + \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}$$

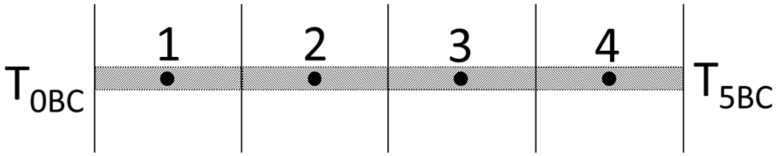
$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u$$

a_P	a_E	a_W	S_u
$a_E + a_W + \frac{(V_P)^{new}}{\Delta t}$	$\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	$\frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}$	$\frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}$

式の整理 → 行列式

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u$$

例．1次元，4CV



$$\left\{\begin{aligned}
a_{P1} T_1 &= a_{E1} T_2 + S_{BC0} + S_{u1} \\
a_{P2} T_2 &= a_{E2} T_3 + a_{W2} T_1 + S_{u2} \\
a_{P3} T_3 &= a_{E3} T_4 + a_{W3} T_2 + S_{u3} \\
a_{P4} T_4 &= a_{W4} T_3 + S_{BC5} + S_{u4}
\end{aligned}\right.$$

$$\begin{bmatrix} a_{p1} & -a_{E1} & 0 & 0 \\ -a_{W2} & a_{P2} & -a_{E2} & 0 \\ 0 & -a_{W3} & a_{P3} & -a_{E3} \\ 0 & 0 & -a_{W4} & a_{P4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{BC0} + S_{u1} \\ S_{u2} \\ S_{u3} \\ S_{BC5} + S_{u4} \end{bmatrix}$$

$$[A][T]=[b]$$

手作業：非定常、生成なし

例題:1次元非定常熱伝導

銅丸棒(断面積 $S = 10^{-4}$m², 長さ 0.4 m)

温度拡散率 $\Gamma = {}^{\kappa}/_{\rho\, c_p} = 10^{-4}$ m²/s

熱伝導率 $\kappa = 360\, W/(m\, K)$,

比熱 $c_p = 400\, J/(kg\, K)$, 密度 $\rho = 9000\, kg/m^3$

内部発熱等なし　S_T=0

軸(x)方向の1次元熱伝導, 両端温度固定

初期温度＝低温側温度

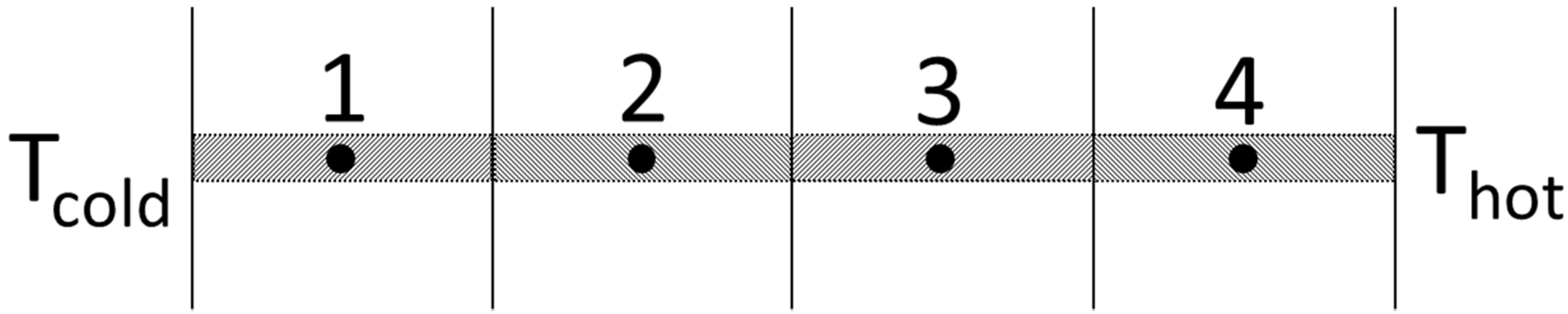
Δt=1000 s 後

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \mathrm{div}(\Gamma\ \mathrm{grad} T) = 0$$

T_{cold}=100K　　　　T_{hot}=300K

棒全体を，4つの Control Volume に等分割する.

Control Volume(CV) の中心に，代表点を考える.



CVの長さは全長の4分の1 = 0.1 m.

代表点間の距離も，全長の4分の1 = 0.1 m.

Δt=1000 s 後

作業手順

- 基礎式を離散化した式の係数を，各control volume に対して求める
  - 境界（端）では，特別な処置が必要
- この係数を並べて，control volume 代表点での温度に関する連立方程式を得る
- この連立方程式を，行列式で表現する
- 行列式を解いて，温度分布を求める

内部 control volume CV2

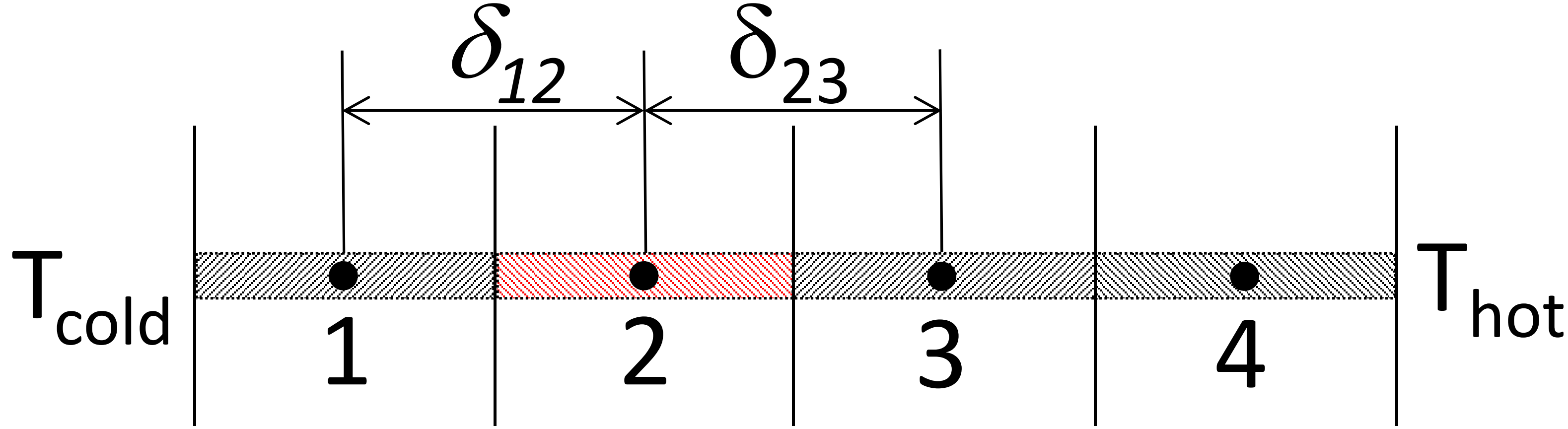
$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u$$

a_P	a_E	a_W	S_u	S_P
$a_E + a_W - S_P$	$\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}} = \frac{\Gamma_{23} S_{23}}{\delta_{23}} = \frac{\Gamma S}{\delta_{23}} = \frac{10^{-4}\ 10^{-4}}{0.1} = 10^{-7}$	$\frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}} = \frac{\Gamma_{12} S_{12}}{\delta_{12}} = \frac{\Gamma S}{\delta_{12}} = \frac{10^{-4}\ 10^{-4}}{0.1} = 10^{-7}$	$\frac{(T_2 V_2)^{old}}{\Delta t} = \frac{(T_2)^{old} 10^{-4} 10^{-1}}{1000} = (T_2)^{old} 10^{-8}$	$-\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} = -\frac{10^{-4} 10^{-1}}{1000} = 10^{-8}$

今回は，断面積S，温度拡散率 Γ も一定である.

CV3 についても同様.

Δt=1000 s とする



境界 control volume CV1

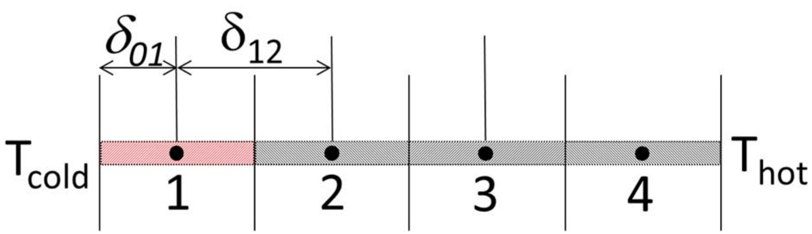
境界面(温度T_{cold})おける勾配$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w$ を，最も単純に，T_P とT_{cold} の値を線形近似して求める $\left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_{cold}}{\delta_{01}}$

$$\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t}T_P - \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t} - \Gamma S\frac{T_E - T_P}{\delta_{PE}} + \Gamma S\frac{T_P - T_{cold}}{\delta_{01}} = 0$$

$$\left(\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} + \frac{\Gamma S}{\delta_{PE}} + 0 + \frac{\Gamma S}{\delta_{01}}\right)T_P = \left(\frac{\Gamma S}{\delta_{PE}}\right)T_E + (0)T_W + \frac{\Gamma S}{\delta_{01}}T_{cold} + \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}$$

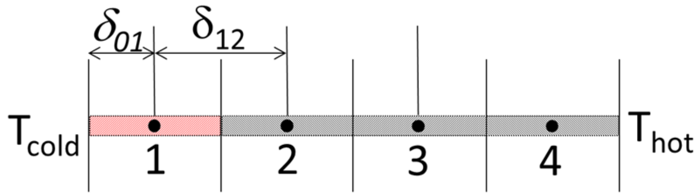
$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u + S_{u\_BC}$$

a_P	a_E	a_W	S_u	S_{u_BC}	S_P	S_{P_BC}
$a_E + a_W - S_P - S_{P\_BC}$	$\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	0	$\frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}$	$\frac{\Gamma S}{\delta_{01}}T_{cold}$	$-\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t}$	$-\frac{\Gamma S}{\delta_{01}}$



境界 control volume CV1

境界面(温度T_{cold})おける勾配 $\left(\frac{dT}{dx}\right)_w$ を，最も単純に，T_P とT_{cold} の値を線形近似して求める $\left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_{\mathrm{cold}}}{\delta_{01}}$



$$\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t}T_P - \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t} - \Gamma S\frac{T_E - T_P}{\delta_{PE}} + \Gamma S\frac{T_P - T_{\mathrm{cold}}}{\delta_{01}} = 0$$

$$\left(\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} + \frac{\Gamma S}{\delta_{PE}} + 0 + \frac{\Gamma S}{\delta_{01}}\right)T_P = \left(\frac{\Gamma S}{\delta_{PE}}\right)T_E + (0)T_W + \frac{\Gamma S}{\delta_{01}}T_{\mathrm{cold}} + \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u + S_{u\_BC}$$

a_P	a_E	a_W	S_u	S_{u_BC}	S_P	S_{P_BC}
$a_E + a_W - S_P - S_{P\_BC}$	$\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}} = \frac{10^{-4}\,10^{-4}}{0.1} = 10^{-7}$	0	$\frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t} = \frac{(T_1)^{old}10^{-4}10^{-1}}{1000} = (T_1)^{old}10^{-8}$	$\frac{\Gamma S}{\delta_{01}}T_{\mathrm{cold}} = \frac{10^{-4}\,10^{-4}}{0.05}T_{\mathrm{cold}} = 2\times10^{-7}T_{\mathrm{cold}}$	$-\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} = -\frac{10^{-4}10^{-1}}{1000} = -10^{-8}$	$-\frac{\Gamma S}{\delta_{01}} = -\frac{10^{-4}\,10^{-4}}{0.05} = -2\times10^{-7}$

境界 control volume CV4

境界面(温度T_{hot})おける勾配 $\left(\frac{dT}{dx}\right)_e$ を，最も単純に，T_P と T_{hot} の値を線形近似して求める $\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_{hot}-T_P}{\delta_{45}}$

$$\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t}T_P - \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t} - \Gamma S\frac{T_{hot}-T_P}{\delta_{45}} + \Gamma S\frac{T_P - T_w}{\delta_{WP}} = 0$$

$$\left(\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} + 0 + \frac{\Gamma S}{\delta_{WP}} + \frac{\Gamma S}{\delta_{45}}\right)T_P = (0)T_E + \left(\frac{\Gamma S}{\delta_{WP}}\right)T_W + \frac{\Gamma S}{\delta_{45}}T_{hot} + \frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t}$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u + S_{u\_BC}$$

a_P	a_E	a_W	S_u	S_{u_BC}	S_P	S_{P_BC}
$a_E + a_W - S_P - S_{P\_BC}$	0	$\frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{34}} = \frac{10^{-4}\,10^{-4}}{0.1} = 10^{-7}$	$\frac{(T_P V_P)^{old}}{\Delta t} = \frac{(T_4)^{old}10^{-4}10^{-1}}{1000} = (T_4)^{old}10^{-8}$	$\frac{\Gamma S}{\delta_{45}}T_{hot} = \frac{10^{-4}\,10^{-4}}{0.05}T_{hot} = 2\times10^{-7}T_{hot}$	$-\frac{(V_P)^{new}}{\Delta t} = -\frac{10^{-4}10^{-1}}{1000} = -10^{-8}$	$-\frac{\Gamma S}{\delta_{45}} = -\frac{10^{-4}\,10^{-4}}{0.05} = -2\times10^{-7}$

これまでのまとめ(記入用)

CV	$a_P = a_E + a_W - S_P - S_{P\_BC}$	$a_E = \frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	$a_W = \frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}$	S_u	S_{u_BC}	S_P	S_{P_BC}
1							
2							
3							
4							

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u + S_{u\_BC}$$

式 ....

....

....

....

これまでのまとめ

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u + S_{u\_BC}$$

CV	$a_P = a_E + a_W - S_P - S_{P\_BC}$	$a_E = \frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	$a_W = \frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}$	S_u	S_{u_BC}	S_P	S_{P_BC}
1	3.1×10^{-7}	10^{-7}	0	$(T_1)^{old}10^{-8}$	$2 \times 10^{-7} T_{cold} = 2 \times 10^{-5}$	-10^{-8}	-2×10^{-7}
2	2.1×10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	$(T_2)^{old}10^{-8}$	0	-10^{-8}	0
3	2.1×10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	$(T_3)^{old}10^{-8}$	0	-10^{-8}	0
4	3.1×10^{-7}	0	10^{-7}	$(T_4)^{old}10^{-8}$	$2 \times 10^{-7} T_{hot} = 6 \times 10^{-5}$	-10^{-8}	-2×10^{-7}

$$3.1 \times 10^{-7}\ T_1 = 10^{-7}\ T_2 + 2 \times 10^{-7}\ T_{cold} + (T_1)^{old}10^{-8}$$

$$2.1 \times 10^{-7}\ T_2 = 10^{-7}\ T_1 + 10^{-7}\ T_3 + (T_{21})^{old}10^{-8}$$

$$2.1 \times 10^{-7}\ T_3 = 10^{-7}\ T_2 + 10^{-7}\ T_4 + (T_3)^{old}10^{-8}$$

$$3.1 \times 10^{-7}\ T_4 = 10^{-7}\ T_3 + 2 \times 10^{-7}\ T_{hot} + (T_4)^{old}10^{-8}$$

行列式（記入用）

$$\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

式の整理 → 行列式

初期条件 OLD

$$3.1T_1 = T_2 + 2\,T_{cold} + 0.1(T_1)^{old}$$
$$2.1T_2 = T_1 + T_3 + 0.1(T_2)^{old}$$
$$2.1T_3 = T_2 + T_4 + 0.1(T_3)^{old}$$
$$3.1\,T_4 = T_3 + 2T_{hot} + 0.1(T_4)^{old}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$[A][x]=[b]$$

$$\begin{bmatrix} 3.1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200+10 \\ 10 \\ 10 \\ 600+10 \end{bmatrix}$$

行列式を解く

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 119 \\ 160 \\ 206 \\ 263 \end{bmatrix}$$

Δt=1000 s 後

定常解

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 175 \\ 225 \\ 275 \end{bmatrix}$$

Maximaで解く場合

http://maxima.sourceforge.net/

```
/*  equations  */
eq1: [3.1*t1-t2=210, -t1+2.1*t2-t3=10, -t2+2.1*t3-t4=10, -t3+3.1*t4=610];

/*  temperature  */
T : [t1,t2,t3,t4];

/* 係数行列の表示 */
Ab: augcoefmatrix(eq1, T);

/* 対角成分を1にしてみる */
echelon(Ab);

/* solve */
solve(eq1, T);

/* 解いた結果を小数点で表示する */
float( solve(eq1, T)),numer;
```

まとめ

行列

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u + S_{u\_BC}$$

$$[A][T]=[b]$$

$$\begin{bmatrix} a_{p1} & -a_{E1} & 0 & 0 \\ -a_{W2} & a_{P2} & -a_{E2} & 0 \\ 0 & -a_{W3} & a_{P3} & -a_{E3} \\ 0 & 0 & -a_{W4} & a_{P4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{u1} + S_{u1\_BC} \\ S_{u2} + S_{u2\_BC} \\ S_{u3} + S_{u3\_BC} \\ S_{u4} + S_{u4\_BC} \end{bmatrix}$$

- 偏微分方程式の各項から，これら行列に入る係数が出てくる。
- 項毎に行列を作り，まとめることで，最終的に解きたい行列式を作成する。

旧版

基礎式：定常、生成あり

非定常熱伝導方程式（拡散方程式）

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\Gamma\,\mathrm{grad}T) + S_T$$
$$= \nabla \cdot (\Gamma \nabla T) + S_T$$

$\Gamma = {}^{\kappa}/_{\rho\, c_p}$ [m²/s]　温度拡散率

熱伝導率 $\kappa[W/(m\ K)]$,

比熱 c_p $[J/(kg\ K)]$, 密度 $\rho[kg/m^3]$

S_T　生成項

定常状態

$$\mathrm{div}(\Gamma\,\mathrm{grad}T) + S_T = 0$$

検査体積(Control Volume)に渡って積分

$$\int_{CV} \mathrm{div}(\Gamma\,\mathrm{grad}T)dV + \int_{CV} S_T dV = 0$$

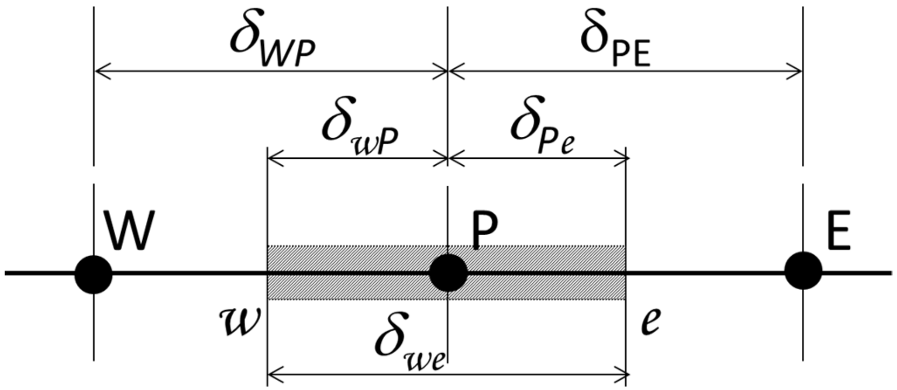
$$\int_{S} (\Gamma\,\mathrm{grad}T)\cdot \boldsymbol{n} dS + \int_{CV} S_T dV = 0$$

1次元とし，点P について考える．

$$\int_S (\Gamma\ \mathrm{grad}T)\cdot \boldsymbol{n} dS + \int_{CV} S_T dV = (\Gamma\ \mathrm{S\ grad}T)_e - (\Gamma\ \mathrm{S\ grad}T)_w + S_T\ \Delta V$$

$$= \left(\Gamma\ \mathrm{S}\ \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(\Gamma\ \mathrm{S}\ \frac{dT}{dx}\right)_w + S_T\ \Delta V$$

$$= \Gamma_e S_e \left(\frac{dT}{dx}\right)_e - \Gamma_w S_w \left(\frac{dT}{dx}\right)_w + S_T\ \Delta V = 0$$



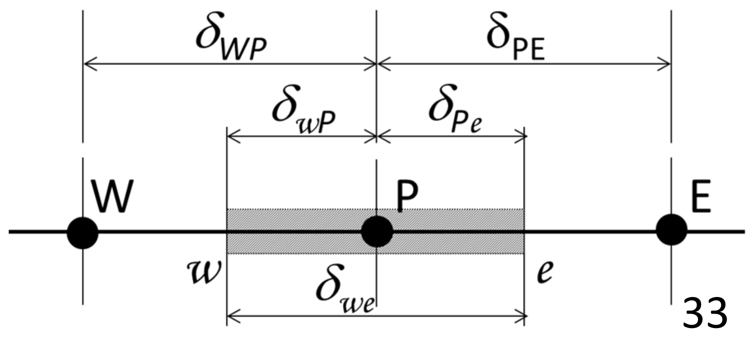
勾配について

検査体積面wにおける勾配$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w$を，最も単純に，点Pと点Wでの値を線形近似して求める

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{\delta_{WP}}$$

同様に

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{\delta_{PE}}$$

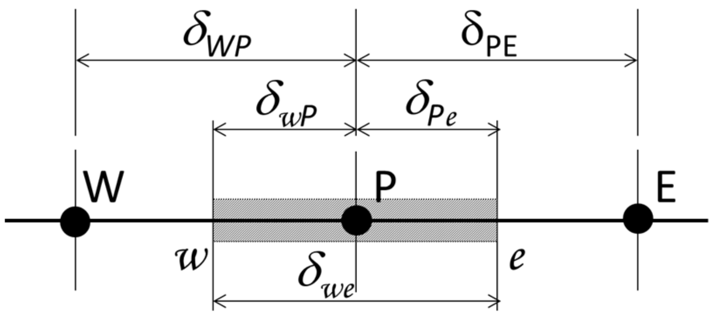


生成項の線形化

生成項が，温度の関数となる場合がある．

線形化　$S_T = S_{T\_u} + S_{T\_P} T_P$

$$\Gamma_e S_e \left(\frac{dT}{dx}\right)_e - \Gamma_w S_w \left(\frac{dT}{dx}\right)_w + S_T\,\Delta V$$
$$= \Gamma_e S_e \left(\frac{dT}{dx}\right)_e - \Gamma_w S_w \left(\frac{dT}{dx}\right)_w + \left(S_{T\_u} + S_{T\_P} T_P\right)\Delta V = 0$$



項の整理

これまでのまとめ

$$\Gamma_e S_e \frac{T_E - T_P}{\delta_{PE}} - \Gamma_w S_w \frac{T_P - T_W}{\delta_{WP}} + \left(S_{T\_u} + S_{T\_P} T_P\right)\Delta V = 0$$

T_P, T_W, T_E, についてまとめる.

$$\left(\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}} + \frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}} - S_{T\_P}\Delta V\right) T_P = \left(\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}\right) T_E + \left(\frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}\right) T_W + S_{T\_u}\Delta V$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_{T\_u}\Delta V$$

a_P	a_E	a_W
$a_E + a_W - S_{T\_P}\Delta V$	$\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	$\frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}$

式の整理 → 行列式

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_{T\_u} \Delta V$$

例．1次元，4CV

$$a_{P3}T_3 = a_{E3}T_4 + a_{W3}T_2 + S_{T\_u3}\Delta V$$

$$\begin{cases} a_{P1}T_1 = a_{E1}T_2 + S_{BC0} + S_{T\_u1}\Delta V \\ a_{P2}T_2 = a_{E2}T_3 + a_{W2}T_1 + S_{T\_u2}\Delta V \\ a_{P3}T_3 = a_{E3}T_4 + a_{W3}T_2 + S_{T\_u3}\Delta V \\ a_{P4}T_4 = a_{W4}T_3 + S_{BC5} + S_{T\_u4}\Delta V \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{p1} & -a_{E1} & 0 & 0 \\ -a_{W2} & a_{P2} & -a_{E2} & 0 \\ 0 & -a_{W3} & a_{P3} & -a_{E3} \\ 0 & 0 & -a_{W4} & a_{P4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{BC0} + S_{T\_u1}\Delta V \\ S_{T\_u2}\Delta V \\ S_{T\_u3}\Delta V \\ S_{BC5} + S_{T\_u4}\Delta V \end{bmatrix}$$

$$[A][T]=[b]$$

手作業：定常、生成なし

例題:1次元定常熱伝導

銅丸棒(断面積 $S = 10^{-4}$m², 長さ 0.4 m)

温度拡散率 $\Gamma = {}^{\kappa}/_{\rho\, c_p} = 10^{-4}$ m²/s

熱伝導率 $\kappa = 360\ W/(m\ K)$,

比熱 $c_p = 400\ J/(kg\ K)$, 密度 $\rho = 9000\ kg/m^3$

内部発熱等なし S_T=0

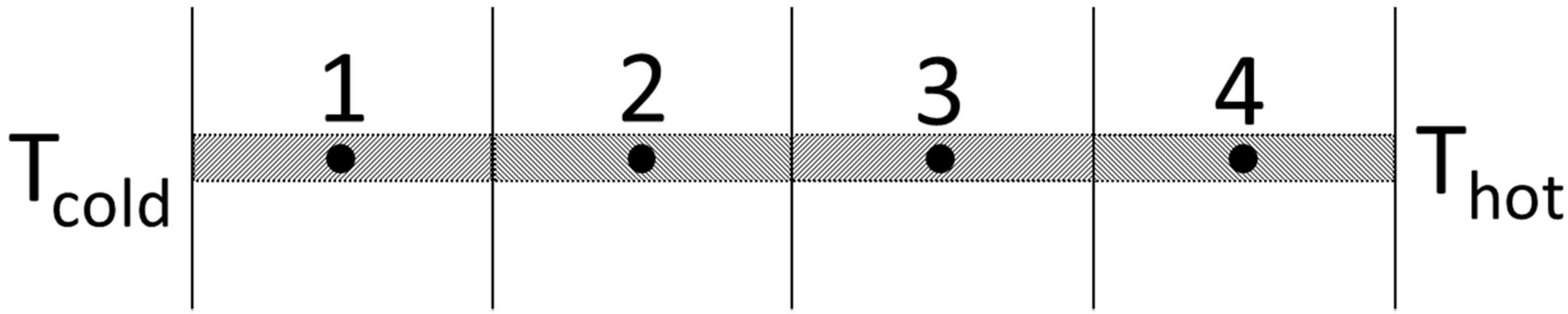
軸(x)方向の1次元熱伝導, 両端温度固定

$$\mathrm{div}(\Gamma\ \mathrm{grad}T) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{dT}{dx}\right) = 0$$

T_{cold}=100K T_{hot}=300K

棒全体を，4つの Control Volume に等分割する.

Control Volume(CV) の中心に，代表点を考える.



CVの長さは全長の4分の1 = 0.1 m.

代表点間の距離も，全長の4分の1 = 0.1 m.

作業手順

- 基礎式を離散化した式の係数を，各control volume に対して求める
  - 境界（端）では，特別な処置が必要
- この係数を並べて，control volume 代表点での温度に関する連立方程式を得る
- この連立方程式を，行列式で表現する
- 行列式を解いて，温度分布を求める

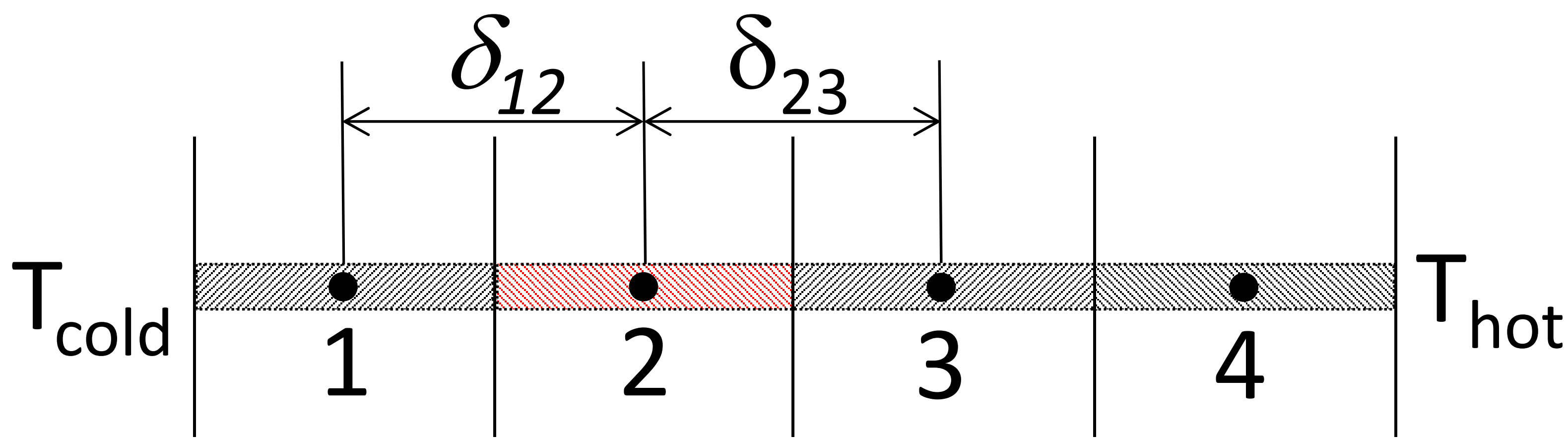
内部 control volume CV2

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W$$

a_P	a_E	a_W
$a_E + a_W$	$\frac{\Gamma_{23} S_{23}}{\delta_{23}} = \frac{\Gamma\ S}{\delta_{23}} = \frac{10^{-4}\ 10^{-4}}{0.1}$ $= 10^{-7}$	$\frac{\Gamma_{12} S_{12}}{\delta_{12}} = \frac{\Gamma\ S}{\delta_{12}} = \frac{10^{-4}\ 10^{-4}}{0.1}$ $= 10^{-7}$

今回は，断面積S，温度拡散率 Γ も一定である．

CV3 についても同様．



境界 control volume CV1

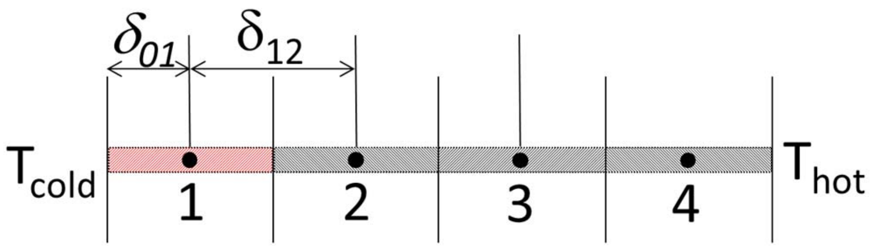
境界面(温度T_{cold})おける勾配 $\left(\frac{dT}{dx}\right)_w$ を，最も単純に，T_P とT_{cold} の値を線形近似して求める $\left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_{\mathrm{cold}}}{\delta_{01}}$

$$\Gamma S \frac{T_E - T_P}{\delta_{PE}} - \Gamma S \frac{T_P - T_{\mathrm{cold}}}{\delta_{01}} = \frac{\Gamma S}{\delta_{PE}} T_E - \frac{\Gamma S}{\delta_{PE}} T_P - \frac{\Gamma S}{\delta_{01}} T_P + \frac{\Gamma S}{\delta_{01}} T_{\mathrm{cold}} = 0$$

$$\left(\frac{\Gamma S}{\delta_{PE}} + 0 + \frac{\Gamma S}{\delta_{01}}\right) T_P = \left(\frac{\Gamma S}{\delta_{PE}}\right) T_E + (0) T_W + \frac{\Gamma S}{\delta_{01}} T_{\mathrm{cold}}$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_U$$

a_P	a_E	a_W	S_U	S_P
$a_E + a_W - S_P$	$\frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	0	$\frac{\Gamma S}{\delta_{01}} T_{\mathrm{cold}}$	$-\frac{\Gamma S}{\delta_{01}}$



境界 control volume CV4

境界面(温度T_{hot})おける勾配 $\left(\frac{dT}{dx}\right)_e$ を，最も単純に，T_P と T_{hot} の値を線形近似して求める $\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_{hot}-T_P}{\delta_{45}}$

$$\Gamma S\frac{T_{hot}-T_P}{\delta_{45}} - \Gamma S\frac{T_P-T_w}{\delta_{WP}} = \frac{\Gamma S}{\delta_{45}}T_{hot} - \frac{\Gamma S}{\delta_{45}}T_P - \frac{\Gamma S}{\delta_{WP}}T_P + \frac{\Gamma S}{\delta_{WP}}T_W = 0$$

$$\left(0 + \frac{\Gamma S}{\delta_{WP}} + \frac{\Gamma S}{\delta_{45}}\right)T_P = (0)T_E + \left(\frac{\Gamma S}{\delta_{WP}}\right)T_W + \frac{\Gamma S}{\delta_{45}}T_{hot}$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_U$$

a_P	a_E	a_W	S_U	S_P
$a_E + a_W - S_P = 0 + 10^{-7} + 2\times10^{-7} = 3\times10^{-7}$	0	$\frac{\Gamma S}{\delta_{WP}} = \frac{\Gamma\ S}{\delta_{34}} = \frac{10^{-4}\ 10^{-4}}{0.1} = 10^{-7}$	$\frac{\Gamma S}{\delta_{45}}T_{hot} = \frac{10^{-4}\ 10^{-4}}{0.05}T_{hot} = 2\times10^{-7}T_{hot}$	$-\frac{\Gamma S}{\delta_{45}} = -2\times10^{-7}$

これまでのまとめ(記入用)

CV	$a_P = a_E + a_W - S_P$	$a_E = \frac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	$a_W = \frac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}$	S_U	S_P
1					
2					
3					
4					

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_U$$

式 ....

....

....

....

これまでのまとめ

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_U$$

CV	$a_P = a_E + a_W - S_P$	$a_E = \dfrac{\Gamma_e S_e}{\delta_{PE}}$	$a_W = \dfrac{\Gamma_w S_w}{\delta_{WP}}$	S_U	S_P
1	3×10^{-7}	10^{-7}	0	$2 \times 10^{-7} T_{cold}$ $= 2 \times 10^{-5}$	-2×10^{-7}
2	2×10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	0	0
3	2×10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	0	0
4	3×10^{-7}	0	10^{-7}	$2 \times 10^{-7} T_{hot}$ $= 6 \times 10^{-5}$	-2×10^{-7}

$$3 \times 10^{-7}\, T_1 = 10^{-7}\, T_2 + 2 \times 10^{-7}\, T_{cold}$$

$$2 \times 10^{-7}\, T_2 = 10^{-7}\, T_1 + 10^{-7}\, T_3$$

$$2 \times 10^{-7}\, T_3 = 10^{-7}\, T_2 + 10^{-7}\, T_4$$

$$3 \times 10^{-7}\, T_4 = 10^{-7}\, T_3 + 2 \times 10^{-7}\, T_{hot}$$

行列式（記入用）

$$\begin{matrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \end{matrix} \quad \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

式の整理 → 行列式

$$3\,T_1 = T_2 + 2T_{cold}$$

$$2\,T_2 = T_1 + T_3$$

$$2T_3 = T_2 + T_4$$

$$3T_4 = T_3 + 2\,T_{hot}$$

$$[A][x]=[b]$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2T_{cold} \\ 0 \\ 0 \\ 2T_{hot} \end{bmatrix}$$

行列式を解く

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 125 \\ 175 \\ 225 \\ 275 \end{bmatrix}$$

Maxima で解く場合

http://maxima.sourceforge.net/

```
/*  equations  */
eq1: [3*t1-t2=200, -t1+2*t2-t3=0, -t2+2*t3-t4=0, -t3+3*t4=600];

/*  temperature  */
T : [t1,t2,t3,t4];

/* 係数行列の表示 */
Ab: augcoefmatrix(eq1, T);

/* 対角成分を1にしてみる */
echelon(Ab);

/* solve */
solve(eq1, T);
/* 解いた結果を小数点で表示する */
float( solve(eq1, T)),numer;
```